Fonctions convexes

Exercice 1. *Déterminant*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et $x < y < z$. Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} > 0$.

Exercice 2. *Somme de fractions*

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$. Montrer que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$.

Exercice 3. *Monotonie*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que l'on a :
- soit f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- soit f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- soit il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que f est décroissante sur $]-\infty, a]$, puis croissante sur $[a, +\infty[$.

Exercice 4. *Fonction convexe bornée*

1) Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est décroissante.
2) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est constante.

Exercice 5. *f convexe majorée par g affine*

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et $g : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ affine. On suppose : $\begin{cases} \forall\, x > 0,\ f(x) \leqslant g(x), \\ f(1) = g(1). \end{cases}$
Montrer que $f = g$.

Exercice 6. *Position par rapport à une asymptote*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe telle que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = mx + p$ en $+\infty$.
Montrer que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de cette asymptote.

Exercice 7. *Fonction convexe dérivable*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe dérivable. Montrer que f' est continue.

Exercice 8. *Étude à l'infini*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que : $f \geqslant 0,\ f' \geqslant 0,\ f'' \geqslant 0$.
1) Étudier l'existence des limites (dans $\overline{\mathbb{R}}$) en $+\infty$ de $f(x)$, $f'(x)$, $\dfrac{f(x)}{x}$.
2) Même question pour les limites en $-\infty$ de $f(x)$, $f'(x)$, et $xf'(x)$.

Exercice 9. *Zéro de f''*

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} f(0)$.
Montrer qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $f''(c) = 0$.

Exercice 10. *$f((x+y)/2) \leqslant (f(x) + f(y))/2$*

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall\, x, y \in [a, b],\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$.
Montrer que f est convexe.

Exercice 11. *Suites adjacentes*

Soit $f : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ convexe, bijective, croissante. On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$a \leqslant u_0 \leqslant v_0 \leqslant b, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{f(u_n) + f(v_n)}{2}\right).$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

Exercice 12. *Polygone inscrit dans un cercle de périmètre maximum*

Soit $n \geqslant 3$ et $A_1 A_2 \ldots A_n$ un polygone convexe à n côtés inscrit dans un cercle fixé.
Montrer que le périmètre de ce polygone est maximal si et seulement si le polygone est régulier.

Exercice 13. *Fonctions logarithmiquement convexe*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que : ($\ln f$ est convexe) $\iff$ ($\forall\, \alpha > 0$, f^α est convexe).

Exercice 14. *Limite de $f(x)-xf'(x)$*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe dérivable.

1) Montrer que $p = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-xf'(x))$ existe.

2) On suppose p fini. En utilisant le fait que $f(x)-xf'(x)$ est bornée au voisinage de $+\infty$, montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ admettent une même limite m finie en $+\infty$.

3) Montrer alors que $f(x)-mx-p \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice 15. *Fonction positive concave*

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ concave.

1) Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

2) Montrer que : $\forall\ x,y \geqslant 0,\ f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$.

Exercice 16. *Constante d'Euler*

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ concave, dérivable, croissante.

1) Montrer que : $\forall\ x \geqslant 1,\ f(x+1)-f(x) \leqslant f'(x) \leqslant f(x)-f(x-1)$.

2) On pose : $\begin{cases} u_n = f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)-f(n) \\ v_n = f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)-f(n+1). \end{cases}$ Montrer que ces suites convergent.

3) On prend $f(x)=\ln x$. Soit $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ (constante d'Euler). Calculer γ à 10^{-2} près.

Exercice 17. *Tangentes passant par un point*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe dérivable, et $A=(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Étudier le nombre maximal de tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par A.

Exercice 18. *Caractérisation des fonctions convexes ou concaves par le TAF*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall\ a,b\in\mathbb{R}$ tq $a<b$, $\exists!\ c\in]a,b[$ tq $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

1) Montrer que pour tout $a\in\mathbb{R}$, la fonction $b \longmapsto \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est monotone sur $]-\infty,a[$ et sur $]a,+\infty[$.

2) En déduire que f est strictement convexe ou strictement concave.

Exercice 19. *Pseudo-dérivée seconde*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que : $\forall\ x\in\mathbb{R},\ D^2f(x) = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ existe.

1) Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, calculer $D^2f(x)$.

2) Soit f quelconque et $a<b<c$ tels que $f(a)=f(b)=f(c)$.
Montrer qu'il existe $x\in]a,c[$ tq $D^2f(x)\leqslant 0$.

On suppose à présent que : $\forall\ x\in\mathbb{R}, D^2f(x)\geqslant 0$.

3) Soient $a<b<c$ et P le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 coïncidant avec f aux points a,b,c. Montrer que $P''\geqslant 0$.

4) Calculer P'' en fonction de a,b,c et $f(a),f(b),f(c)$. En déduire que f est convexe.

Exercice 20. *Fonction convexe non dérivable sur un sous ensemble dénombrable*

Soit (a_n) une suite bornée de réels. On pose $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{|x-a_n|}{3^n}$.

Montrer que f est convexe, et n'est pas dérivable aux points a_n.

Exercice 21. *Convergence simple + convexité => convergence uniforme sur un compact*

Soit (f_n) une suite de fonctions convexes sur $[a,b]$ convergeant simplement vers une fonction f supposée continue. Soit $\varepsilon>0$.

1) Montrer qu'il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que : $\forall\ x,y\in[a,b],\ |x-y|\leqslant\dfrac{b-a}{p} \Longrightarrow |f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$.

On choisit un tel p, et on fixe une subdivision (a_k) de $[a,b]$ telle que $a_k = a+k\dfrac{b-a}{p}$.

2) Soit $t\in[0,1]$. Encadrer $f_n\big(ta_k+(1-t)a_{k+1}\big)$ par deux fonctions affines de t en utilisant la convexité de f_n.

3) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f.

Exercice 22. *DL d'une fonction convexe*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe dérivable telle que $f(x) = a + bx + \dfrac{cx^2}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$.

Montrer que f est deux fois dérivable en 0 et $f''(0) = c$

(encadrer $f'(x)$ par les taux d'accroissements de f entre $x - \varepsilon x$, x et $x + \varepsilon x$).

Exercice 23. *DL d'une fonction convexe*

Soit f continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f$, et l'on suppose que $F(x) = x^2 + \mathrm{o}(x)$. Montrer que $f(x) = 2x + \mathrm{o}(\sqrt{x})$.

Solutions

Exercice 2.
$y_i = \dfrac{x_i}{x_{i+1}} \Longrightarrow \sqrt[n]{y_1 \cdots y_n} \leqslant \dfrac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$.

Exercice 8.
2) $f(x) \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \longrightarrow 0$.
TAF entre x et $x/2 \Longrightarrow 2\left(f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leqslant xf'(x) \leqslant 0 \Longrightarrow xf'(x) \longrightarrow 0$.

Exercice 14.
1) Fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
2) $f(x) - xf'(x) = -x^2 \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$. Donc, $x \longmapsto \dfrac{f(x)-p}{x} \searrow$ et $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \nearrow$.
3) $p \leqslant f(x) - mx \leqslant f(x) - xf'(x)$.

Exercice 15.
1) Soient $x < y$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \geqslant \dfrac{f(y)-f(0)}{y-0} \Longrightarrow \dfrac{f(x)}{x} \geqslant \dfrac{f(y)}{y} + f(0)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$.
2) Pour $x < y$: $f(x+y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$ avec $t = \dfrac{x}{x-y} < 0$,
donc $f(x+y) - f(x) - f(y) \leqslant \dfrac{xy}{x-y}\left(\dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{f(y)}{y}\right) \leqslant 0$.

Exercice 19.
2) Prendre x tel que $f(x)$ soit maximal.

Exercice 20.
Pour a_0 : $\big|f(a_0+h) - f(a_0) - |h|\big| \leqslant \dfrac{|h|}{2}$.

Exercice 23.
Soit $F(x) = x^2 + xG(x)$. On a pour $h > 0$: $f(x) \leqslant \dfrac{F(x+xh)-F(x)}{xh} = 2x + xh + \dfrac{G(x+xh)-G(x)}{h} + G(x+xh)$.
Soit $\varepsilon > 0$ et A tel que $y \geqslant A \Longrightarrow |G(y)| \leqslant \varepsilon^2$. On prend $h = \varepsilon/\sqrt{x}$ et on obtient $f(x) - 2x - \varepsilon\sqrt{x} \leqslant \varepsilon\sqrt{x} + \varepsilon^2$ d'où $f(x) \leqslant 2x + \mathrm{o}(\sqrt{x})$. L'inégalité inverse se montre de même.